मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

नाम .....

131

324 (FF)

2022

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।*

(iii) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टत: उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

1. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि L किसी समतल में स्थित समस्त सरल रेखाओं का एक समुच्चय है तथा संबंध

$$R = \{(L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ पर लम्ब है}\}$$

समुच्चय L में परिभाषित है । निम्नलिखित में से सही उत्तर चुनिए : *1*

(i) R स्वतुल्य है (ii) R सममित है

(iii) R संक्रामक है (iv) इनमें से कोई नहीं

(ख) यदि आव्यूह A और B के क्रम (कोटि) क्रमश: $m \times n$ और $n \times p$ हैं, तो AB का क्रम है : *1*

(i) $p \times m$ (ii) $n \times m$

(iii) $m \times p$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(ग) अवकल समीकरण

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 2$$

की घात है : *1*

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(घ) व्यंजक $\hat{i}.\hat{i} - \hat{j}.\hat{j} + \hat{k}.\hat{k}$ का मान है : *1*

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(ङ) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान होगा : 1

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{8}$

2. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) फलन $f: R \to R$, $f(x) = x^2 \; \forall \; x \in R$ द्वारा परिभाषित है, तो फलन f है : 1

(i) एकैकी आच्छादक

(ii) बहु-एक आच्छादक

(iii) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं

(iv) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) यदि $f : R \to R$ जहाँ $f(x) = \cos x$ और $g : R \to R$ जहाँ $g(x) = x^2$, तो सिद्ध कीजिए कि $fog \neq gof$. 1

(ग) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान होगा : 1

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(घ) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $x = 0$ पर संतत है। 1

(ङ) यदि ΔABC के शीर्ष $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(2, 3, 1)$ हों, तो ΔABC का क्षेत्रफल वर्ग इकाई में है : 1

(i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

3. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$ को हल कीजिए। 2

(ख) यदि $f: A \to B$ तथा $g: B \to C$ एकैकी हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $gof: A \to C$ भी एकैकी होगा। 2

(ग) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, तो AB तथा BA का मान ज्ञात कीजिए। 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. 2

4. निम्नलिखित ***सभी*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) यदि ΔABC के शीर्ष $A(2, -6)$, $B(5, 4)$, $C(k, 4)$ और उसका क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो, तो सिद्ध कीजिए कि k का मान 12, –2 होगा । 2

(ख) यदि $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ग) सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(घ) सिद्ध कीजिए कि दिए हुए सम्पूर्ण पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लम्ब-वृत्तीय शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है । 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) दो वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ एवं $(x-2)^2 + y^2 = 4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) समाकल $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)(x^2+1)}$ ज्ञात कीजिए । 5

(ग) हल कीजिए : 5

$$(1+y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$$

(घ) दर्शाइए कि : 5

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(ङ) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए । 5

(च) सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x$$

जहाँ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$. 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं ***पाँच*** खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(ख) यदि एक समतल द्वारा निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड क्रमशः a, b, c हैं और इसकी मूल-बिन्दु से दूरी p है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$. 5

(ग) यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$, तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z = xyz$. 5

(घ) अवकल समीकरण

$$\left[x \sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right] dx + x\, dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$ यदि $x = 1$ को हल कीजिए। 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$\int_0^{\pi/2} \log (\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

(च) $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A|B) = \frac{2}{5}$ है। 5

7. निम्नलिखित में से किसी *एक* खण्ड को हल कीजिए :

(क) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0.$$ 4

(ii) वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के उन अभिलंबों के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर हैं। 4

(ख) (i) फलन $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \le 1 \\ 5 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित है तो क्या f, $x = 0$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर संतत है ? 4

(ii) यदि $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \le x \le 1$, तो

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0.$$ 4

8. निम्नलिखित में से किसी *एक* खण्ड को हल कीजिए :

(क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(ख) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी *एक* खण्ड को हल कीजिए :

(क) दिए गए आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$ और इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 8

(ख) सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत विशालतम लम्ब-वृत्तीय शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ होता है । 8

(English Version)

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all* ***nine*** *questions in this question paper.*

(iii) ***All*** *questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) *Marks allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) ***Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.***

(vii) ***Do not waste your time over a question you cannot solve.***

1. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) If L is a set of all straight lines in any plane and relation $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is perpendicular to } L_2\}$ is defined in L. Select the correct answer from the following : 1

(i) R is reflexive (ii) R is symmetric

(iii) R is transitive (iv) None of these

(b) If the order of matrices A and B are respectively $m \times n$ and $n \times p$, then the order of AB is : 1

(i) $p \times m$ (ii) $n \times m$

(iii) $m \times p$ (iv) None of these

(c) The degree of the differential equation $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 2$ is : 1

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(d) The value of the expression $\hat{i}.\hat{i} - \hat{j}.\hat{j} + \hat{k}.\hat{k}$ is : 1

(i) 0 (ii) 1

(iii) 2 (iv) 3

(e) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ will be : 1

(i) 0 (ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{8}$

2. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) The function $f : R \to R$, $f(x) = x^2 \; \forall \; x \in R$ is defined, then f is : *1*

(i) one-one onto

(ii) many-one onto

(iii) one-one, but not onto

(iv) neither one-one nor onto

(b) If $f : R \to R$ where $f(x) = \cos x$ and $g : R \to R$ where $g(x) = x^2$, then prove that $fog \neq gof$. *1*

(c) The principal value of $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ will be : *1*

(i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$

(iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) None of these

(d) Prove that the function $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$. *1*

(e) The area of $\Delta \; ABC$, whose vertices are $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$ and $C(2, 3, 1)$ in square units is : *1*

(i) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{22}}{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{23}}{3}$ (iv) None of these

3. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) Solve $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$. *2*

(b) If $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-one, then prove that $gof : A \to C$ is also one-one. *2*

(c) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, then find AB and BA. *2*

(d) Prove that $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. *2*

4. Attempt ***all*** parts of the following :

(a) If vertices of $\Delta \; ABC$ are $A(2, -6)$, $B(5, 4)$ and $C(k, 4)$ and if the area of $\Delta \; ABC$ be 35 square units, then prove that the value of k will be $12, -2$. *2*

(b) If $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$, then find the value of x. *2*

(c) Find the value of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}.$$

(d) Show that the semi-vertical angle of right circular cone of given total surface and maximum volume is $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. 2

5. Attempt any ***five*** parts of the following :

(a) Find the area between region of two circles $x^2+y^2=4$ and $(x-2)^2+y^2=4$. 5

(b) Find the integral $\int \frac{x^4\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$. 5

(c) Solve : https://www.upboardonline.com

$(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$ 5

(d) Show that :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(e) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix. 5

(f) Prove that :

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x,$$

where $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$. 5

6. Attempt any ***five*** parts of the following : 5

(a) Prove that :

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

(b) If a, b, c are the intercepts on coordinate axes respectively by a plane and its distance from the origin is p, then prove that $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$. 5

(c) If $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$, then prove that $x+y+z = xyz$. 5

(d) Solve the differential equation

$$\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + x\,dy = 0,$$

$y = \frac{\pi}{4}$ if $x = 1$. 5

(e) Prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$. 5

(f) Find $P(A \cup B)$, if $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A \mid B) = \frac{2}{5}$. 5

7. Attempt any ***one*** part of the following :

(a) (i) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, then prove that

$A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$. 4

(ii) Find the equations of the normals, to the curve $y = x^3 + 2x + 6$. which are parallel to the line $x + 14y + 4 = 0$. 4

(b) (i) Is the function f defined by

$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \leq 1 \\ 5 & \text{if } x > 1 \end{cases}$ continuous at

$x = 0, x = 1$ and $x = 2$? 4

(ii) If $y = e^{a \cos^{-1} x}$, $-1 \leq x \leq 1$, then

$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$. 4

8. Attempt any ***one*** part of the following :

(a) By using elementary transformation, find the inverse of the following matrix : 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ and $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$. 8

9. Attempt any ***one*** part of the following :

(a) Verify : $A \cdot (\text{adj } A) = |A| I$ for the given matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ and find its inverse. 8

(b) Prove that the volume of the largest right circular cone that can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{8}{27}$ of the volume of the sphere. 8