

अनुक्रमांक

नाम .

131

324(EZ)

2021

गणित

समय : 2 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

Time : 2 Hours 15 Mins. Total Marks : 100

निर्देश : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

1. प्रश्न संख्या-1 बहुविकल्पीय है, जिसमें 5 खण्डों में से किन्हीं 3 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 2 अंक का है। $2 \times 3 = 6$ अंक
2. प्रश्न संख्या-2 अति लघु उत्तरीय है, जिसमें 5 खण्डों में से किन्हीं 2 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 2 अंक का है। $2 \times 2 = 4$ अंक

324(EZ)

2

3. प्रश्न संख्या-3 तथा प्रश्न संख्या-4 लघु उत्तरीय-I प्रकार का है। प्रश्न संख्या-3 में से किन्हीं 2 खण्डों को तथा प्रश्न संख्या-4 में से किन्हीं 2 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 4 अंक का है। $4 \times 4 = 16$ अंक
4. प्रश्न संख्या-5 तथा प्रश्न संख्या-6 लघु उत्तरीय-II प्रकार का है। प्रश्न संख्या-5 में से किन्हीं 3 खण्डों को तथा प्रश्न संख्या-6 में से किन्हीं 3 खण्डों को हल कीजिए। प्रत्येक खण्ड 10 अंक का है। $10 \times 6 = 60$ अंक
5. प्रश्न संख्या-7, 8 तथा 9 दीर्घ उत्तरीय हैं। इनमें से किसी एक प्रश्न को हल कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है। $14 \times 1 = 14$ अंक
1. Question No. 1 is Multiple choice type. Answer any 3 parts out of 5 parts. Each part is of 2 marks. $2 \times 3 = 6$ Marks
2. Question No. 2 is Very Short Answer type. Answer any 2 parts out of 5 parts. Each part is of 2 marks. $2 \times 2 = 4$ Marks
3. Question No. 3 and Question No. 4 are Short Answer-I type. Answer any 2 parts from Question No. 3 and answer any 2 parts from Question No. 4. Each part is of 4 marks. $4 \times 4 = 16$ Marks

4. Question No. 5 and Question No. 6 are Short Answer-II type. Answer any 3 parts from Question No. 5 and answer any 3 parts from Question No. 6. Each part is of 10 marks. $10 \times 6 = 60$ Marks
5. Question Nos. 7, 8 and 9 are Long Answer type. Answer any one question from these. Each question is of 14 marks. $14 \times 1 = 14$ Marks

1. क) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात है

- i) 3 ii) 2
iii) 1 iv) परिभाषित नहीं है।

ख) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बराबर है

- i) π ii) $-\frac{\pi}{3}$
iii) $\frac{\pi}{3}$ iv) $\frac{2\pi}{3}$

ग) समाकलन $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ बराबर है

- i) $\frac{\pi}{3}$ ii) $\frac{2\pi}{3}$
iii) $\frac{\pi}{6}$ iv) $\frac{\pi}{12}$

घ) मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$ है, तौ

- i) f एकैकी आच्छादक है
ii) f बहुपद आच्छादक है
iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है
iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

ड) किस बिन्दु पर रेखा $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है ?

- i) (1, 2) ii) (2, 1)
iii) (1, -2) iv) (-1, 2)

1. a) The degree of differential equation

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

is

- i) 3 ii) 2
iii) 1 iv) not defined.

b) $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ is equal to

- i) π ii) $-\frac{\pi}{3}$
iii) $\frac{\pi}{3}$ iv) $\frac{2\pi}{3}$

c) Integral $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ is equal to

i) $\frac{\pi}{3}$ ii) $\frac{2\pi}{3}$

iii) $\frac{\pi}{6}$ iv) $\frac{\pi}{12}$

d) Suppose that the function $f: R \rightarrow R$ is defined by $f(x) = 3x$. Then

i) f is one-one onto

ii) f is many-one onto

iii) f is one-one but not onto

iv) f is neither one-one nor onto.

e) On which point the line $y = x + 1$ is tangent to the curve $y^2 = 4x$?

i) (1, 2) ii) (2, 1)

iii) (1, -2) iv) (-1, 2).

2. क) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$$

द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है, परन्तु न तो सर्वात्मक है और न संक्रामक है।

ख) $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

ग) समीकरण $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ से

x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

घ) यदि $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ और $P(A/B) = \frac{2}{5}$

तो $P(A \cup B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

ड) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और

$\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात

कीजिए। <https://www.upboardonline.com>

2. a) Prove that in set $\{1, 2, 3\}$, the relation given by

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3),$$

$$(1, 2), (2, 3)\}$$

is reflexive, but neither symmetric nor transitive.

b) Find the value of $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$.

c) From equation

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \text{ find the values of } x, y \text{ and } z.$$

d) If $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ and $P(A/B) = \frac{2}{5}$ then find the value of $P(A \cup B)$.

- c) Find the angle between the vectors
 $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and
 $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$.
3. क) यदि $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, तो सिद्ध
 कीजिए कि $2x^2 + 1 = \sqrt{5}$.
- ख) दीर्घवृत्त के उस परिवार का अवकल समीकरण
 ज्ञात कीजिए जिनकी नाभि x -अक्ष पर और
 केन्द्र मूल बिन्दु पर है।
- ग) यदि $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ और
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो दिखाइए कि सदिश
 \vec{a} और \vec{b} परस्पर लम्ब हैं।
- घ) दिखाइए कि बिन्दुओं $(4, 7, 8), (2, 3, 4)$
 से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं
 $(-1, -2, 1)$ और $(1, 2, 5)$ से होकर
 जाने वाली रेखा के समान्तर है।
3. a) If $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, then prove
 that $2x^2 + 1 = \sqrt{5}$.
- b) Find the differential equation of
 that family of ellipse whose focus
 is on the x -axis and centre is at
 the origin.

- c) If $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ and
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, then show that
 the vectors \vec{a} and \vec{b} are mutually
 perpendicular.
- d) Show that the line passing
 through the points $(4, 7, 8)$,
 $(2, 3, 4)$ is parallel to the line
 passing through the points
 $(-1, -2, 1)$ and $(1, 2, 5)$.
4. क) $\sin x$ का $\log x$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक
 ज्ञात कीजिए।
- ख) पूर्णाकों 1 से 11 तक में से दो पूर्णांक
 यादृच्छया चुने जाते हैं। यदि इनका योग सम है,
 तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पूर्णांक
 विषम है।
- ग) दिखाइए कि फलन $f(x) = x^2 + 3x + 5$,
 $x = 1$ पर संतत है।
- घ) निम्न अवरोधों
 $x + y \leq 4$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$ के अन्तर्गत
 $Z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात
 कीजिए।

4. a) Find the differential coefficient of $\sin x$ w.r.t. $\log x$.
- b) From integers 1 to 11, two integers are selected at random. If their sum is even, then find the probability that both the integers are odd.
- c) Show that the function $f(x) = x^2 + 3x + 5$, is continuous at $x = 1$.
- d) Under the following constraints
 $x + y \leq 4$
 $x \geq 0$
 $y \geq 0$
 find the maximum value of $Z = 3x + 4y$.

5. क) अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f (i) वर्धमान (ii) हासमान है।

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{77}{36}$$

- घ) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
- ङ) एक थैला A में 4 लाल और 5 काली गेंदें हैं। दूसरा थैला B में 6 लाल और 3 काली गेंदें हैं। एक गेंद थैला A से निकाल कर थैला B में स्थानान्तरित कर दी जाती है। इसके बाद थैला B से एक गेंद निकाली जाती है। इसके लाल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
- च) वक्र $y = \cos(x+y)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 2y = 0$ के समान्तर हैं।
5. a) Find the interval in which the function $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is
 (i) increasing (ii) decreasing.
- b) Prove that
- $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$
- c) Prove that
- $$\sin^{-1} \frac{8}{17} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \tan^{-1} \frac{77}{36}$$
- d) Find the value of $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$.

- e) In a bag A there are 4 red and 5 black balls. In another bag B there are 6 red and 3 black balls. One ball is taken out from A and transferred in bag B. After this one ball is drawn from bag B. Find the probability of that to be red.
- f) Find the equations of the tangents to the curve $y = \cos(x+y)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ which are parallel to the line $x + 2y = 0$.
6. क) वक्र $x^2 = 4y$ और सरल रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- ख) आलेखीय विधि द्वारा निम्न अवरोधों के अन्तर्गत रेखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए।
 $x + 2y \geq 10$
 $3x + 4y \leq 24$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 एवं $Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

- ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।
- घ) यदि A तथा B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि A तथा B' भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी।
- ङ) समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन और बिन्दु (2, 2, 1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
- च) यदि पूर्णाकों के समुच्चय Z में $R = \{(a, b) \in Z \times Z : (a-b), 5 \text{ से विभाजित है}\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध है, क्या R एक तुल्यता सम्बन्ध है ?
6. a) Find the area of the section enclosed between the curve $x^2 = 4y$ and straight line $x = 4y - 2$.

- b) Solve the following linear programming problem by graphical method under the following constraints :

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Find the minimum value of $Z = 200x + 500y$.

- c) Find the general solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x.$$

- d) Prove that if A and B are independent events then A & B' are also independent events.

- e) Find the vector equation of a plane, passing through the intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6 \text{ and}$$

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) - 5 = 0 \text{ and the point } (2, 2, 1).$$

- f) If in the set of integers Z , $R = \{(a, b) \in Z \times Z : (a - b) \text{ is divisible by } 5\}$ be a given relation, then is R an equivalence relation?

7. क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।

- ख) i) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश राशियाँ इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

- ii) k का मान ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष $(k, 0)$, $(4, 0)$ और $(0, 2)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है।

7. a) Solve the following system of the equations by matrix method :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

by matrix method.

- b) i) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three vector quantities, such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, then prove that $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

- ii) Find the value of k , if area of triangle with vertex $(k, 0)$, $(4, 0)$ and $(0, 2)$ is 4 square unit.

8. क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

- ख) सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्तर्गत महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत एक वर्ग है।

8. a) Find the value of

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx.$$

- b) Prove that the rectangle of maximum area inside a circle is square.

9. क) दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$(x - y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$$
 समघातीय अवकल

समीकरण है तथा इसका हल भी ज्ञात कीजिए।

- ख) i) यदि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का अभिलम्ब x -अक्ष से ϕ कोण बनाता है, तो दिखाइए कि इसका समीकरण $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$ है।

- ii) यदि $y = x^{\sin^{-1} x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. a) Show that the differential equation $(x - y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$ is homogeneous

differential equation, and find also its solution.

- b) i) If normal to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ makes an angle ϕ , with the axis of x , then show that its equation is $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi$.

- ii) If $y = x^{\sin^{-1} x}$, then find $\frac{dy}{dx}$.