

अनुक्रमांक

नाम

131

324(EM)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

324(EM)

2

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

- क) यदि एक फलन $f: N \rightarrow N$, $f(x) = x - 1$, $x > 2$ द्वारा परिभाषित है तथा $f(1) = f(2) = 1$ है तो सही विकल्प होगा
- f एकैकी आच्छादक है
 - f बहु एक आच्छादक है
 - f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है
 - f बहु एक है परन्तु आच्छादक नहीं है।

ख) समुच्चय N में $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R का परिसर निम्न में से कौन-सा है ?

- i) $\{2, 4, 8\}$ ii) $\{2, 4, 6, 8\}$
 iii) $\{2, 4, 6\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4\}$. 1

ग) समाकलन $\int x \sin x \, dx$ का मान होगा

- i) $x \sin x + \cos x$
 ii) $-x \cos x + \sin x$
 iii) $x \sin x - \cos x$
 iv) $x \cos x + \sin x$. 1

घ) अवकल समीकरण

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + y = 0$$

की कोटि है

- i) 1 ii) 2
 iii) 3 iv) 4. 1

ड) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$

का मान है

- i) -1 ii) 1
 iii) 3 iv) 0. 1

1. Attempt all the parts of the following :

a) Let the function $f : N \rightarrow N$ be defined by $f(x) = x - 1$, $x > 2$ and $f(1) = f(2) = 1$.

The correct alternative will be

- i) f is one-one onto
 ii) f is many one onto
 iii) f is one-one but not onto
 iv) f is many one but not onto. 1

b) If $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ is defined on the set N then which one is the range of R ?

- i) $\{2, 4, 8\}$ ii) $\{2, 4, 6, 8\}$
 iii) $\{2, 4, 6\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4\}$. 1

c) The value of $\int x \sin x \, dx$ is

- i) $x \sin x + \cos x$
 ii) $-x \cos x + \sin x$
 iii) $x \sin x - \cos x$
 iv) $x \cos x + \sin x$. 1

d) The order of differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y = 0 \text{ is}$$

- i) 1 ii) 2
iii) 3 iv) 4. 1

e) The value of

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$$

is

- i) -1 ii) 1
iii) 3 iv) 0. 1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) दिखाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है। 1

ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2}$ की कोटि तथा घात बताइए। 1

घ) निम्न अवरोधों

$$x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0$$

के अन्तर्गत $Z = x^2 + y^2$ का अधिकतम

मान ज्ञात कीजिए। 1

ड) यदि $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ तो $P(A/B)$ का मान

ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all the parts of the following :

a) Find principal value of

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad 1$$

b) Show that function

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$. 1

c) Find order and degree of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2}. \quad 1$$

d) Under the following constraints

$$x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0,$$

find the maximum value of

$$Z = x^2 + y^2. \quad 1$$

- e) If $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$
then find the value of $P(A/B)$. 1
3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :
- क) यदि $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ तो
 $(g \circ f)$ तथा $(f \circ g)$ के मान ज्ञात कीजिए। 2
- ख) यदि $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$
तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. 2
- ग) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(1, 2, 7)$,
 $B(2, 6, 3)$, $C(3, 10, -1)$ संरेख हैं। 2
- घ) एक थैली में 5 लाल तथा 6 काली गेंदें हैं। दो
गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं। उनके अलग-
अलग रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2
3. Attempt all the parts of the following :
- a) If $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, then
find $(g \circ f)$ and $(f \circ g)$. 2
- b) If $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$
then prove that $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. 2

- c) Prove that points $A(1, 2, 7)$,
 $B(2, 6, 3)$, $C(3, 10, -1)$ are
collinear. 2
- d) Two balls are drawn randomly
from a bag containing 5 red and
6 black balls. What is the
probability that both are of
different colours? 2
4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :
- क) अन्तराल $[1, 4]$ में $f(x) = x^2 - 4x - 3$
के लिए मध्य मान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 2
- ख) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ और
 $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल एवं अन्तर
के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 2
- ग) यदि $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$
तो λ तथा μ के मान ज्ञात कीजिए। 2
- घ) A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं। यदि
 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ तो ज्ञात
कीजिए
i) $P(A \cap B)$
ii) $P(A \cup B)$. 2

4. Attempt all the parts of the following :

a) Verify mean value theorem for

$$f(x) = x^2 - 4x - 3 \text{ in the interval } [1, 4]. \quad 2$$

b) If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ and

$$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} \text{ are two vectors, find unit vector along their sum and difference.} \quad 2$$

c) If $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$ then find the values of λ and μ . 2

d) A and B are two independent events. If $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ then find

i) $P(A \cap B)$

ii) $P(A \cup B)$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right). \quad 5$$

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$$

ग) सिद्ध कीजिए कि 5

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2. \quad 5$$

घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ङ) सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्षकोण $\tan^{-1} \sqrt{2}$ होता है। 5

च) यदि $-1 < x < 1$ के लिये

$$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \text{ तो सिद्ध}$$

$$\text{कीजिए कि } \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}. \quad 5$$

5. Attempt any five parts of the following :

a) Prove that

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right). \quad 5$$

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$$

5

c) Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

5

d) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$.

5

e) Prove that semi-vertical angle of a cone of given slant height and maximum volume is $\tan^{-1} \sqrt{2}$.

5

f) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ for $-1 < x < 1$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{यदि } x < 0 \\ x+1 & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

एक संतत फलन है।

5

ख) वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ एवं x -अक्ष के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ग) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो तीन बिन्दुओं $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$ $(-4, -2, 3)$ से गुजरता है।

घ) निम्न व्यंजनों के अन्तर्गत

$$Z = 1.5x + 2.5y \text{ का न्यूनतमीकरण कीजिए :}$$

$$x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

ङ) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

5

च) ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गद्दी से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। इन्कों की संख्या की प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

5

6. Attempt any five parts of the following :

a) Prove that the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x < 0 \\ x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

is a continuous function.

5

- b) Find the area of the region enclosed between circle $x^2 + y^2 = 8x$ and parabola $y^2 = 4x$ and x -axis. 5
- c) Find the equation of a plane passing through three points $(1, 1, -1), (6, 4, -5), (-4, -2, 3)$. 5
- d) Minimize $Z = 1.5x + 2.5y$ subject to the constraints $x + 3y \geq 3$, $x + y \geq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 5
- e) Find equation of tangent and normal at the point $(1, 1)$ of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$. 5
- f) From a well shuffled pack of 52 cards, two cards are drawn one by one with replacement. Find probability distribution of the number of aces. 5
7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8

- ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय $2x + y + z = 1$, $x - 2y - 3z = 1$, $3x + 2y + 4z = 5$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8
7. Attempt any one part of the following :
- a) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ by using elementary operations. 8
- b) Solve the following system of equations by Matrix method : $2x + y + z = 1$, $x - 2y - 3z = 1$, $3x + 2y + 4z = 5$. 8
8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क) i) एक फलन $f: R \rightarrow (-1, 1)$ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $\forall x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी तथा आच्छादक होगा। 4
- ii) मान लीजिए \vec{a} , \vec{b} और \vec{c} तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$ और इनमें से

प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत हैं, तो $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ ज्ञात कीजिए। 4

ख) अवकल समीकरण

$$(1 + y^2) + (x - e^{-\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ को हल कीजिए।} \quad 8$$

8. Attempt any one part of the following :

a) i) A function $f: R \rightarrow (-1, 1)$ is defined by

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad \forall x \in R, \text{ then}$$

prove that f is one-one and onto. 4

ii) Suppose that \vec{a} , \vec{b} and \vec{c} are such type of vectors that $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$ and each one is perpendicular to the sum of other two vectors, then find $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$. 4

b) Solve the differential equation

$$(1 + y^2) + (x - e^{-\tan^{-1} y}) \frac{dy}{dx} = 0. \quad 8$$

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) i) $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

ii) यदि $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 4

9. Attempt any one part of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$. 8

b) i) Evaluate $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$. 4

ii) If $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$, then find $\frac{dy}{dx}$. 4

324(EM)-1,50,000