

- निर्देश : (1) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 (2) प्रश्न पत्र में दिए गये निर्देश सावधानी पूर्वक पढ़कर प्रश्नों के उत्तर लिखिए।
 (3) प्रश्न पत्र में दो खण्ड दिये गये हैं - खण्ड "अ" और खण्ड "ब"।
 (4) खण्ड "अ" में दिये गये प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं, प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।
 (5) खण्ड "ब" में प्रश्न क्रमांक 6 से 26 तक आंतरिक विकल्प दिये गये हैं।
 (6) प्रश्न क्रमांक 6 से 10 तक प्रत्येक 2 अंक का है।
 (7) प्रश्न क्रमांक 11 से 14 तक प्रत्येक 3 अंक का है।
 (8) प्रश्न क्रमांक 15 से 21 तक प्रत्येक 4 अंक का है।
 (9) प्रश्न क्रमांक 22 से 26 तक प्रत्येक 5 अंक का है।

खण्ड- "अ"

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए : 5 × 1 = 5

(i) यदि $\frac{1}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)} = \frac{a}{(1 + \sin x)} + \frac{b}{(2 + \sin x)}$ तो $a + b =$

- (अ) 0 (ब) 1
 (स) 2 (द) 3

(ii) $\sin^{-1} X$ का प्रान्त है-

- (अ) $(-\pi, \pi)$ (ब) $[-1, 1]$
 (स) $(0, 2\pi)$ (द) $(-\infty, \infty)$

(iii) बिन्दु (3, 4, 5) की XZ-समतल से दूरी है-

- (अ) 4 (ब) 3
 (स) 5 (द) 0

(iv) रेखाएं $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ एवं $\frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$ परस्पर हैं-

- (अ) लम्बवत (ब) संपाती
 (स) प्रतिच्छेदी (द) समान्तर

(v) बिन्दु (a, b, c) की X-अक्ष से न्यूनतम दूरी है-

- (अ) $\sqrt{b^2 + c^2}$ (ब) $\sqrt{a^2 + b^2}$
 (स) $\sqrt{c^2 + a^2}$ (द) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

प्रश्न 2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए : 5 × 1 = 5

- (i) Y-अक्ष के समान्तर समतल समीकरण $ax + by + d = 0$ है।
- (ii) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ का मान शून्य होता है।
- (iii) $\int \frac{dx}{\sin x}$ का मान $\log \tan \frac{x}{2} + c$ है।
- (iv) किसी भी कण का अधिकतम ऊँचाई पर वेग सदैव शून्य होता है।
- (v) कार्य एक सदिश राशि है।

प्रश्न 3. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए : 5 × 1 = 5

- (1) सिम्पसन का नियम सिद्धान्त पर आधारित है।
- (2) यदि $y = a^x$ है तो $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$ है।
- (3) x^{-57} का अवकल गुणांक है।
- (4) सहसम्बन्ध गुणांक समाश्रयण गुणांकों का माध्य होता है।
- (5) सदिश $3i - 2j + 6k$ की दिक्कोज्याएँ हैं।

प्रश्न 4. प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए : 5 × 1 = 5

- (i) $\int_a^b f(x)dx$ के लिये सिम्पसन का एक तिहाई नियम लिखो।
- (ii) समीकरण $x^3 - x - 2 = 0$ का मूल किस अंतराल में है?
- (iii) आंकिक विधि में समलम्ब चतुर्भुज नियम का सूत्र लिखिए।
- (iv) पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है।
- (v) न्यूटन-रेफसन का सूत्र लिखो।

प्रश्न 5. सही जोड़ी बनाइए : 5 × 1 = 5

- | 'अ' | 'ब' |
|--|--|
| (a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ | (i) $\frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right]$ |
| (b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ | (ii) $\log \left[x + \sqrt{x^2 + a^2} \right]$ |
| (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$ | (iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$ |
| (d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$ | (iv) $\frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]$ |
| (e) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$ | (v) $\log \left[x + \sqrt{x^2 - a^2} \right]$ |
| | (vi) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$ |

खण्ड - "ब"

प्रश्न 6. यदि $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$, तो \vec{r} की दिशा में एकांक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ और $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ समतलीय हैं।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि क्रम से ली गई त्रिभुज की तीन भुजाओं से निरूपित सदिशों का योग शून्य सदिश होता है। 2

(अथवा) यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, तो सदिश $3\vec{a} - 2\vec{b}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. उस गोले का सदिश समीकरण एवं कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(-1, 0, 1)$ एवं त्रिज्या 2 हो। 2

(अथवा) सिद्ध करो कि सदिश $2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ और $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ परस्पर लम्ब हैं।

प्रश्न 9. $\int \sqrt{1 + \cos x} dx$ का मान ज्ञात करो। 2

(अथवा) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10. $\int x \cdot \log x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

(अथवा) $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ समाकलन x के सापेक्ष कीजिए।

प्रश्न 11. रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ तथा समतल $3x + y + z = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 3

(अथवा) बिन्दुओं $A(2, -3, 4)$ व $B(-5, 6, 7)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास मानकर बनाये गये गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 12. उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(X_1, Y_1, Z_1)$, $B(X_2, Y_2, Z_2)$ तथा $C(X_3, Y_3, Z_3)$ हैं। 3

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि दो समान्तर समतलों $2x - 2y + z + 3 = 0$ तथा $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ के बीच की दूरी $1/6$ है।

प्रश्न 13. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए। $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ 3

(अथवा) दो सदिशों $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ तथा $2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 14. यदि किसी त्रिभुज ABC का केन्द्रक G हो तो सिद्ध कीजिए कि 3

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

(अथवा) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तो $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 15. $\frac{x^2 + 7x}{x^2 + 2x - 8}$ को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए। 4

(अथवा) $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ को आंशिक भिन्नो में विभक्त कीजिए।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए कि : 4

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \pi/4$$

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} \sqrt{x}$$

प्रश्न 17. प्रथम सिद्धान्त से $\sin X$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। 4

(अथवा) $\log \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

प्रश्न 18. यदि $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$ । 4

(अथवा) यदि $x^y = e^{y^x}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log x}{(1 - \log x)^2}$ ।

प्रश्न 19. फलन $f(x) = x^2 - 1$ के लिये अन्तराल $[-1, 1]$ में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए। 4

(अथवा) एक कण $S = 5e^{-t} \cos t$ नियम से गतिमान है, जब $t = \pi/2$ हो तो इसका (a) वेग व (b) त्वरण क्या होगा?

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए : सहसम्बन्ध गुणांक ρ का मान -1 से +1 के बीच होता है। 4

(अथवा) निम्नांकित आँकड़ों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

प्रश्न 21. निम्नांकित सारणी गालियर में 70 रुपये मूल्य के संगत भोपाल में सर्वाधिक 4

	ग्वालियर	भोपाल
औसत मूल्य	65	67
मानक विचलन	2.5	3.5

दो नगरों में वस्तु के मूल्यों में सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है।

(अथवा) दो समाश्रयण रेखायें $x + 2y = 5$ तथा $2x + 3y = 8$ हैं तो ज्ञात कीजिए :

(i) \bar{x} व \bar{y}

(ii) b_{yx} व b_{xy}

(iii) ρ_{xy}

प्रश्न 22. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ तथा $(0, 0, 1)$ से गुजरता हो तथा इसका केन्द्र $3x - y + z = 2$ पर हो। 5

(अथवा) उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्कोज्याएँ निम्नांकित समीकरण द्वारा निर्धारित हैं : $2l + 2n - m = 0$ तथा $ml + mn + nl = 0$ ।

प्रश्न 23. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin X - \cos X}{X - \frac{\pi}{4}}$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(अथवा) सिद्ध कीजिए कि फलन असंतत है :

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

प्रश्न 24. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ 5

(अथवा) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 25. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$ को हल कीजिए। 5

(अथवा) हल कीजिए $(1 + X^2) \frac{dY}{dX} + 2XY - 4X^2 = 0$ ।

प्रश्न 26. यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

(अथवा) एक साक्षात्कार में एक पद हेतु पति एवं पत्नी शामिल हुए। पति के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है, जबकि पत्नी के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। इनमें से किसी के भी न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Instructions :

- (1) All questions are compulsory.
- (2) Read instructions carefully of the question paper and then write answers of the questions.
- (3) Question paper has two Sections - SECTION - "A" and SECTION - "B"
- (4) In the Section "A" Question Nos. 1 to 5 are Objective type. Each question carries 5 marks.
- (5) In the Section "B" Question Nos. 6 to 26 have internal option.
- (6) Question Nos. 6 to 10 carry 2 Marks Each.
- (7) Question Nos. 11 to 14 carry 3 Marks Each.
- (8) Question Nos. 15 to 21 carry 4 Marks Each.
- (9) Question Nos. 22 to 26 carry 5 Marks Each.

SECTION-"A"

Q.1 Choose the correct options : 5 × 1 = 5

- (i) If $\frac{1}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)} = \frac{a}{(1 + \sin x)} + \frac{b}{(2 + \sin x)}$ then $a + b =$
- (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3
- (ii) The domain of $\sin^{-1} X$ is :
- (A) $(-\pi, \pi)$ (B) $[-1, 1]$
(C) $(0, 2\pi)$ (D) $(-\infty, \infty)$
- (iii) The distance of point (3, 4, 5) from XZ-plane is
- (A) 4 (B) 3
(C) 5 (D) 0
- (iv) Two lines $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and $\frac{x}{5} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$ are mutually
- (A) Perpendicular (B) Coincident
(C) Intersect (D) Parallel
- (v) The shortest distance of point (a, b, c) from X-axis is :
- (A) $\sqrt{b^2 + c^2}$ (B) $\sqrt{a^2 + b^2}$
(C) $\sqrt{c^2 + a^2}$ (D) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Q.2 Write true/false in the following statements : 5 × 1 = 5

- (i) Equation of plane parallel to Y-axis is $ax + by + d = 0$.
- (ii) The value of $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ is zero.

(iii) The value of $\int \frac{dx}{\sin x}$ is $\log \tan \frac{x}{2} + c$.

(iv) The velocity of the particle at the maximum height is always zero.

(v) Work is a vector quantity.

Q3

Fill in the blanks :

5 × 1 = 5

(1) Simpson's Rule is based upon the Principle _____

(2) If $y = a^x$ then $\frac{dy}{dx}$ is _____

(3) Differential coefficient of x^{-57} is _____

(4) The coefficient of correlation is the _____ mean of the regression coefficient.

(5) The direction cosine of the vector $3i - 2j + 6k$ are _____

Q4

Give answers in one word/sentence :

5 × 1 = 5

(i) Write the Simpson's One-third Rule formula for $\int_a^b f(x)dx$.

(ii) In which interval does the root of equation $x^3 - x - 2 = 0$ lie?

(iii) Write the formula of Trapezoidal rule in numerical method.

(iv) Perfect Negative Correlation is

(v) Write Newton-Raphson's formula

Q5

Match the column :

5 × 1 = 5

('A')

('B')

(a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

(i) $\frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \log \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right]$

(b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$

(ii) $\log \left[x + \sqrt{x^2 + a^2} \right]$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$

(iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$

(iv) $\frac{1}{2} \left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \right]$

(e) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

(v) $\log \left[x + \sqrt{x^2 - a^2} \right]$

(vi) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$

SECTION - "B"

Q6

If $\vec{r} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ then find the unit vector in the direction of \vec{r}

- (Or) Show that $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ and $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ are coplanar.
- Q.7 Prove that the sum of three vectors represented by the consecutive sides of triangle is zero vector. 2
- (Or) If $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, then find the magnitude of vector $3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- Q.8 Find the Vector Equation and Cartesian Equation of the sphere whose centre is $(-1, 0, 1)$ and radius is 2. 2
- (Or) Prove that vectors $2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ and $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ are mutually perpendicular.
- Q.9 Evaluate: $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx$. 2
- (Or) Evaluate: $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$.
- Q.10 Evaluate: $\int x \cdot \log x \, dx$. 2
- (Or) Integrate with respect to x : $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$
- Q.11 Find the angle between the line $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ and the plane $3x + y + z = 7$. 3
- (Or) Obtain the equation of the sphere described on the joining of the point $A(2, -3, 4)$ and $B(-5, 6, 7)$ as a diameter.
- Q.12 Find the centroid of the triangle whose vertices are $A(X_1, Y_1, Z_1)$, $B(X_2, Y_2, Z_2)$ and $C(X_3, Y_3, Z_3)$. 3
- (Or) Prove that the distance between two parallel planes $2x - 2y + z + 3 = 0$ and $4x - 4y + 2z + 5 = 0$ is $1/6$.
- Q.13 Prove by vector method that $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$. 3
- (Or) Find the angle between the vectors $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$.
- Q.14 If G is the centroid of any triangle then show that (prove that) 3
- $$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

(Or) If $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ then find $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Q.15 Resolve $\frac{x^2 + 7x}{x^2 + 2x - 8}$ into Partial fractions. 4

(Or) Resolve $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$ into Partial fractions.

Q.16 Prove that : 4

$$\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \pi/4$$

(Or) Prove that

$$\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x} = \tan^{-1} \sqrt{x}$$

Q.17 Differentiate $\sin X$ by First Principle. 4

(Or) Differentiate $\log \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ with respect to x .

Q.18 If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ then prove that $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. 4

(Or) If $x^y = e^{y \cdot x}$, prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \log x}{(1 - \log x)^2}$.

Q.19 Verify Rolle's theorem for function $f(x) = x^2 - 1$ in the interval $[-1, 1]$. 4

(Or) A particle moves according to the law $S = 5e^{-t} \cos t$, find its (a) velocity and (b) acceleration when $t = \pi/2$.

Q.20 Prove that : Value of correlation coefficient ρ lies between -1 to +1. 5

(Or) Find the coefficient of correlation from the following data :

x	2	3	5	7	3
y	15	17	4	5	4

Q.21 An article costs Rs.70 at Gwalior, find the corresponding most appropriate value at Bhopal using the following data : 5

	Gwalior	Bhopal
Mean Value	65	67
Standard Deviation	2.5	3.5

The correlation coefficient between the values of the two cities is 0.8

(Or) Two lines of regression are $x + 2y = 5$ and $2x + 3y = 8$, find :

(i) \bar{x} and \bar{y}

(b) b_{yx} and b_{xy}

(c) ρ_{xy}

Q22 Find the equation of the sphere passing through the points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ and $(0, 0, 1)$ and whose centre lies on the plane $3x - y + z = 2$.
5

(Or) Find the angle between the lines whose direction cosine are given by the relation $2l + 2n - m = 0$ and $ml + mn + nl = 0$.

Q23 Evaluate : $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin X - \cos X}{X - \frac{\pi}{4}}$. 5

(Or) Prove that the function is discontinuous :

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x < 3 \\ 3, & x = 3 \\ x^2, & x > 3 \end{cases}$$

Q24 Evaluate : $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$. 5

(Or) Find the value of $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Q25 Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5xy + 4y^2}{x^2}$. 5

(Or) Solve the $(1 + X^2) \frac{dY}{dX} + 2XY - 4X^2 = 0$.

Q26 Find the probability that a leap year selected at random will contain 53 Sundays. 5

(Or) A husband and his wife attended an interview for a post. Probabilith of the husband being selected $\frac{1}{4}$. whereas that of the wife is $\frac{1}{6}$. Find the probability that none of them will be selected.